

Algorithmen und Datenstrukturen

Tutorium II

Michael R. Jung

27. - 30. 04. 2015



1 Übungsaufgaben zur Landau-Notation

- Ableitungen
- Aufgaben



Ableitungsregeln

Satz (Produktregel)

Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Dann ist

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Satz (Kettenregel)

Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Dann ist

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g'.$$



Aufgabe 1

Leiten Sie folgende Funktionen $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ab ($c \in \mathbb{R}_+$ konstant)!

1 $f(x) := x^x$

2 $f(x) := x^c \cdot \log(x)$

3 $\frac{f}{g}$

4 $\log(\log(x))$ für $x > 1$.



Lösungen:

$$1 \quad (x^x)' = (e^{\ln(x^x)})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + x \frac{1}{x}) = x^x (1 + \ln x)$$

$$2 \quad (x^c \log x)' = cx^{c-1} \log x + x^c \frac{1}{x \ln 2} = x^{c-1} (c \log x + \frac{1}{\ln 2})$$

$$3 \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = (f \cdot (g)^{-1})' = \frac{f'}{g} + f \cdot (-1g^{-2})g' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$4 \quad (\log(\log x))' = \frac{1}{\ln 2 \log x} \cdot \frac{1}{x \ln 2} = \frac{1}{(\ln 2)^2 x \log x} = \frac{1}{(\ln 2)x \ln x}$$



Aufgabe 2

Zeigen oder widerlegen Sie ($1 < c \in \mathbb{R}_+$ konstant):

1 $n^n \in \mathcal{O}(2^n)$

2 $\log n \in \mathcal{O}(\sqrt[c]{n})$

3 $\log n \in \mathcal{O}(\sqrt[n]{n})$



Lösungen:

$$1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2}\right)^n = \infty \Rightarrow n^n \notin \mathcal{O}(2^n)$$

$$2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^{\frac{1}{n}}} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n \ln 2}}{\frac{1}{n} n^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{c}{\ln 2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}-1+1}} =$$

$$\frac{c}{\ln 2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$$



- 3 Zeige zunächst: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0 > \frac{2}{\varepsilon^2}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\varepsilon^2} < n && \quad \quad \quad | \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} \\ \Rightarrow & 1 < \frac{n}{2} \varepsilon^2 && \quad \quad \quad | \cdot (n-1) \\ \Rightarrow & n-1 < \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 && \quad \quad \quad | + 1 \\ \Rightarrow & n < 1 + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Nach binomischem Lehrsatz gilt: $(1 + \varepsilon)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \varepsilon^i = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 + \dots$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & n < (1 + \varepsilon)^n && \quad \quad \quad | \sqrt[n]{(\quad)} \\ \Rightarrow & \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon && \quad \quad \quad | - 1 \\ \Rightarrow & \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon && \quad \quad \quad | \sqrt[n]{n} > 1 \\ \Rightarrow & |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon \end{aligned}$$

Folglich ist also $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.



Daher gilt also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\sqrt[n]{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \log n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log n = \infty$$



Aufgabe 3

Ordnen Sie die folgenden Funktionen aufsteigend nach ihrem asymptotischem Wachstum und zeigen Sie die Korrektheit ihrer gefundenen Reihenfolge!

$$n!, 2^n, \log(n^2 + 2^n), \sqrt{n}, 2^{\log(n^3)}, 2^{3 \log \frac{n}{2}}, n^n$$



Lösung: Eine Reihenfolge ist

$$\sqrt{n}, \log(n^2 + 2^n), 2^{\log(n^3)}, 2^{3 \log \frac{n}{2}}, 2^n, n!, n^n.$$

Beweise:

- Seien $c = 1, n_0 = 1$. Dann ist für $n \geq n_0$:

$$\sqrt{n} \leq n = \log 2^n \leq \log(n^2 + 2^n) = c \log(n^2 + 2^n).$$

- Seien $c = 1, n_0 = 2$. Dann ist für $n \geq n_0$:

$$\log(n^2 + 2^n) \leq \log(2^n + 2^n) = \log(2^{n+1}) = n + 1 \leq n^3 = 2^{\log(n^3)} = c 2^{\log(n^3)}.$$

- Seien $c = 8, n_0 = 0$. Dann ist für $n \geq n_0$:

$$2^{\log(n^3)} = n^3 = 8 \cdot \frac{1}{8} n^3 = 8 \left(\frac{n}{2}\right)^3 = c 2^{\log\left(\left(\frac{n}{2}\right)^3\right)} = c 2^{3 \log \frac{n}{2}}.$$

- Seien $c = 1, n_0 = 0$. Dann ist für $n \geq n_0$:

$$2^{3 \log \frac{n}{2}} = \frac{1}{8} n^3 < 2^n.$$



- Seien $c = 2, n_0 = 1$. Dann ist für $n \geq n_0$:

$$2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_n \leq \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n}_n = 2 \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)}_n = cn!.$$

- Seien $c = 1, n_0 = 0$. Dann ist für $n \geq n_0$:

$$n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}_n \leq \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_n = cn^n.$$

