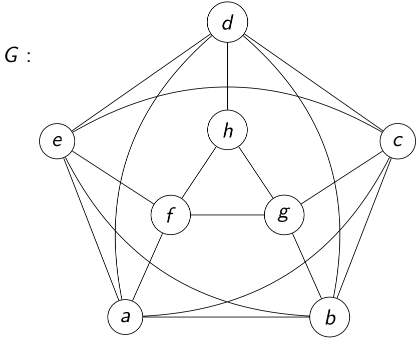
Einführung in die Theoretische Informatik
Tutorium XIII

Michael R. Jung

27. & 28. 01. 2015

Fragestunde & "Betreutes Lernen"

offizielle Fragestunde:	Mo, 16.02.2015, ab 11 c.t. RUD26, 0'313
"Betreutes Lernen"	Fr, 13.02.2015, 11-17 c.t. RUD25, 3.101



Bestimmen Sie für den o.g. Graphen G die Stabiltätszahl (α), die chromatische Zahl (χ), die Matchingzahl (μ), die Cliquenzahl (ω) und die Kantenüberdeckungszahl (β). Wieviele Kanten müssen jeweils mindestens hinzugefügt werden, damit G danach eine Eulerlinie, eine Eulertour, einen Hamiltonpfad bzw. einen Hamiltonkreis enthält? Begründen Sie Ihre Antworten.

Folgende Abhängigkeiten dürfen verwendet werden:

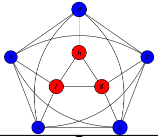
- Wenn ein Graph G mit p Cliquen überdeckt werden kann, so ist $\alpha(G) \leq p$.
- Wenn ein Graph G eine stabile (auch: unabhängige) Knotenmenge der Größe p enthält, so ist $\alpha(G) \geq p$.
- Für alle Graphen G gilt: $\chi(G) \geq \omega(G)$.
- Wenn ein Graph G eine Clique der Größe p enthält, so ist $\omega(G) \geq p$.
- Wenn ein Graph G p-färbbar ist, so ist $\chi(G) \leq p$.
- Es folgt also: Wenn ein Graph G eine Clique der Größe p enthält und p-färbbar ist, so ist $p \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq p$, d.h. $p = \omega(G) = \chi(G)$.

- Für alle Graphen G gilt: $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$.

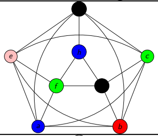
ACHTUNG!

Um die letzte Gleichung zu benutzen, muss einer der beiden Parameter GENAU bestimmt werden!! Es genügt nicht, eine stabile Menge der Größe k und eine Kantenüberdeckung der Größe $|V(G)| - k$ zu finden.

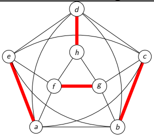
$\alpha(G) = 2$, da $\{a, g\}$ stabil ist und es eine Cliquenüberdeckung mit zwei Cliquen gibt.



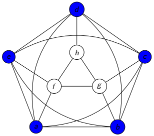
$\chi(G) = 5$, da man den Graphen 5-färben kann und es eine 5-Clique (s.o.) gibt.



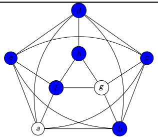
$\mu(G) = 4$, da der Graph nur 8 Knoten hat und ein perfektes Matching (d.h. ein Matching, das alle Knoten überdeckt) existiert.



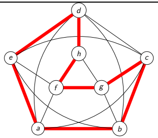
$\omega(G) = 5$, da man eine 5-Clique finden kann und der G 5-färbbar (s.o.) ist (also keine 6-Clique enthalten kann).



$\beta(G) = 6$, da für alle Graphen gilt: $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$. Da $\alpha(G) = 2$ und $|V(G)| = 8$, folgt also die Behauptung.



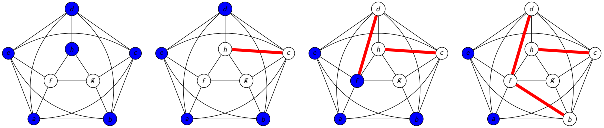
Der Graph enthält bereits einen Hamiltonkreis und somit auch einen Hamiltonpfad.



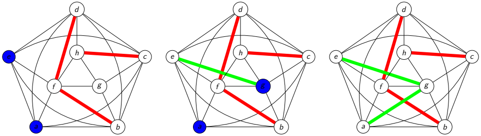
Für Eulerlinie und -tour muss man sich zunächst nur die Knotengrade anschauen.

v	a	b	c	d	e	f	g	h
$\deg(v)$	5	5	5	5	5	4	4	3

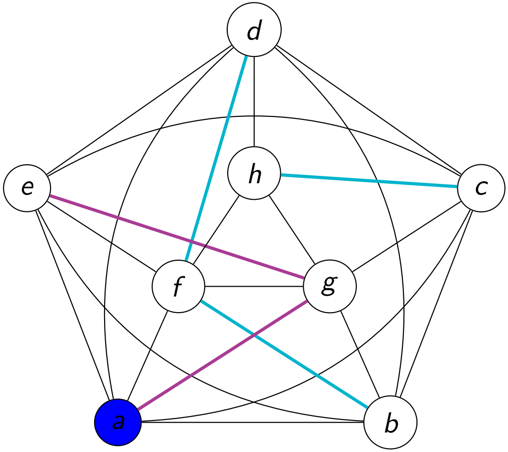
Es gibt also 6 Knoten mit ungeradem Grad, für eine Eulerlinie dürfen aber ur zwei solche enthalten sein. Also müssen wir schon mal mindestens 2 Kanten einfügen. Da aber 5 von diesen in einer Clique sind, d.h. dort die Kanten schon existieren, müssen wir sogar noch mehr Kanten hinzufügen. Grund: Wir können zwar einen der äußeren Knoten mit h verbinden, aber dann sind noch vier Knoten außen übrig, bei denen schon alle Kanten vorhanden sind. Drei (s.u.) reichen aber aus.

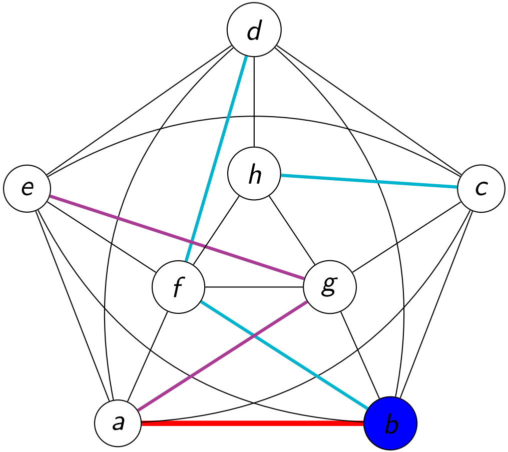


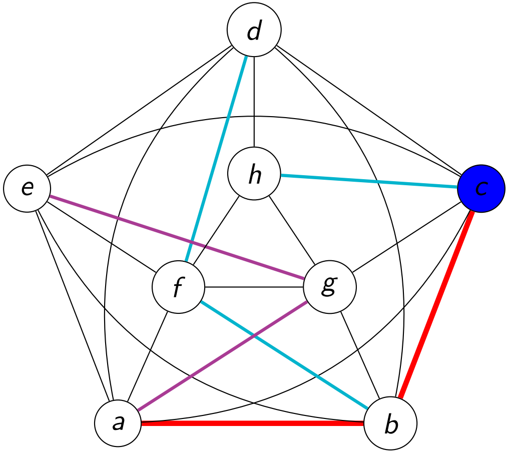
Für die Eulertour müssen jetzt noch die letzten beiden Knoten mit ungeradem Grad verschwinden, dies ist aber aus gleichen Gründen (s.o.) nicht mit einer Kante möglich, aber 2 weitere (also insgesamt 5) genügen.

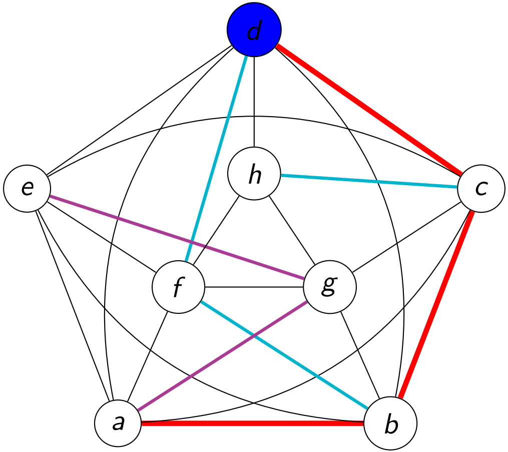


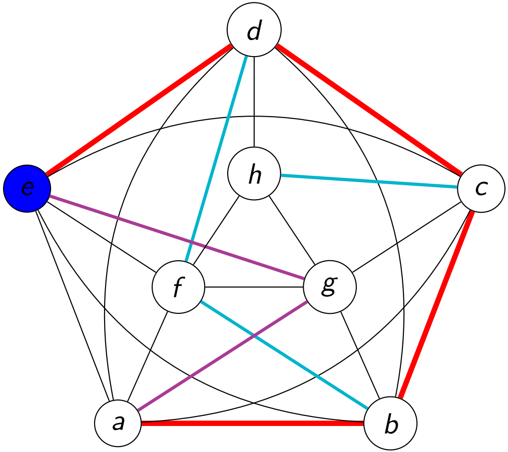
Eulertour

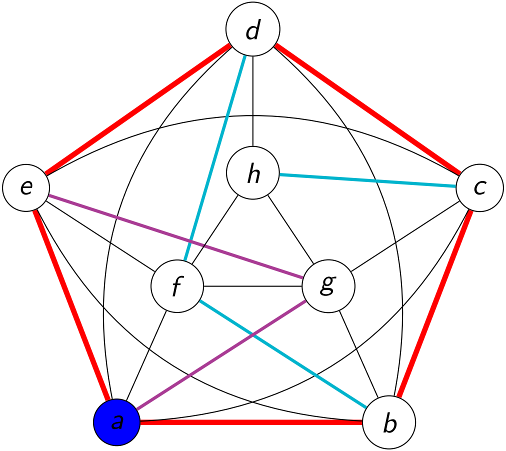


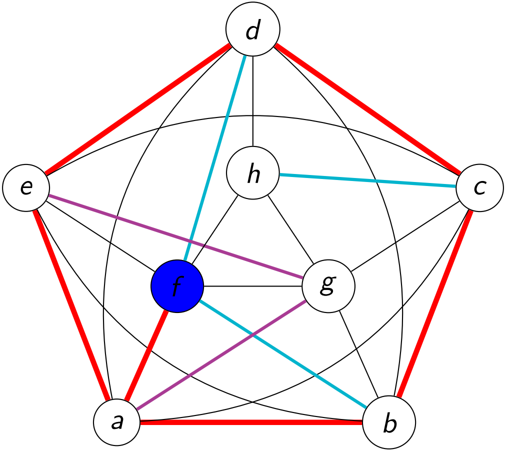

d
h
e
c
f
g
a
b


d
e
h
c
f
g
a
b

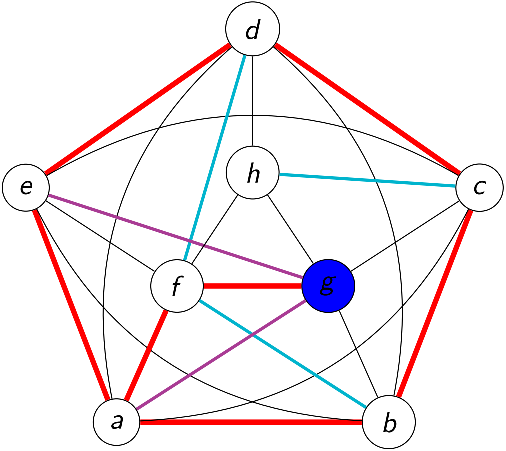

d
h
c
e
f
g
a
b

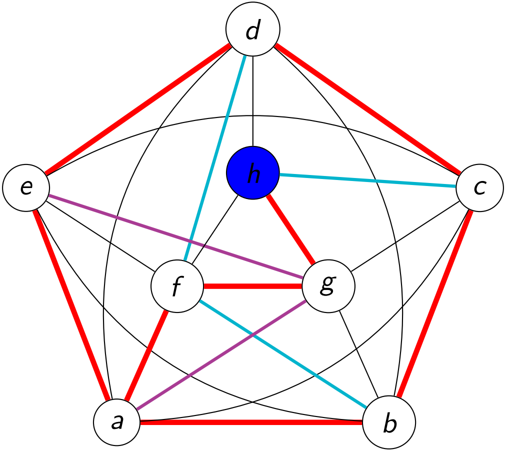

d
h
e
c
f
g
a
b

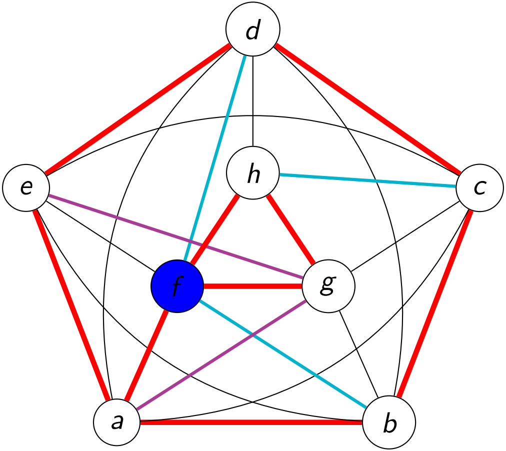

d
e
h
c
f
g
a
b

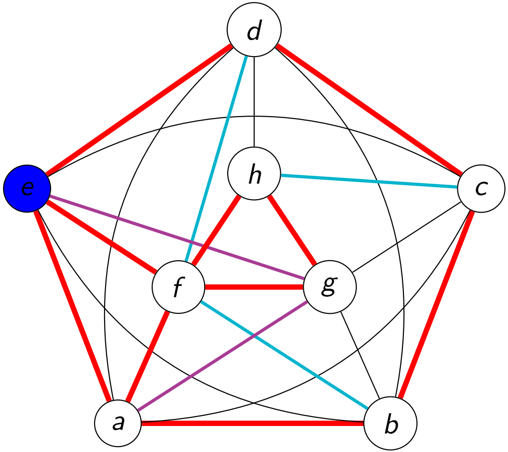

d
h
e
c
f
g
a
b

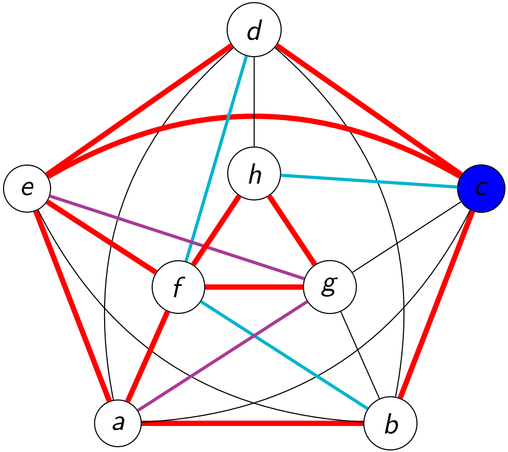
Eulertour



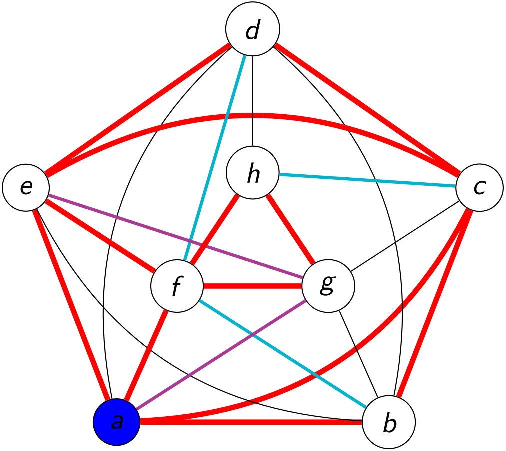

d
h
e
c
f
g
a
b

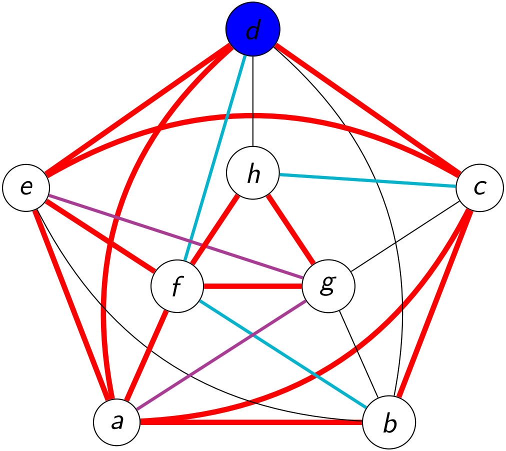

d
h
e
c
f
g
a
b


d
h
e
c
f
g
a
b

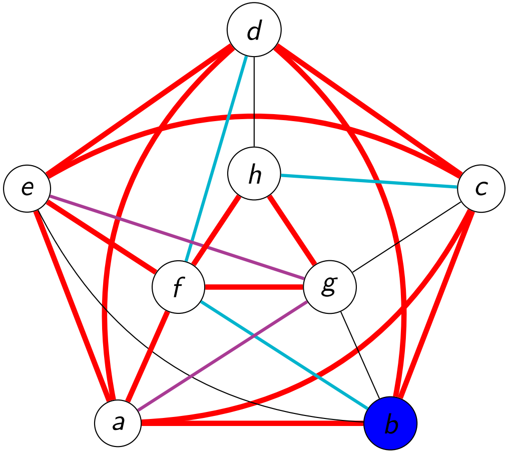

d
e
h
c
f
g
a
b

Eulertour

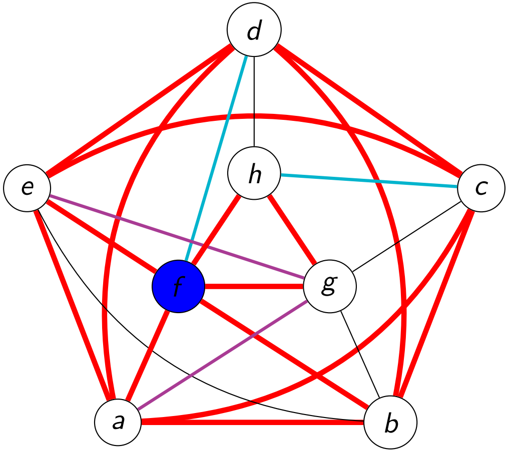


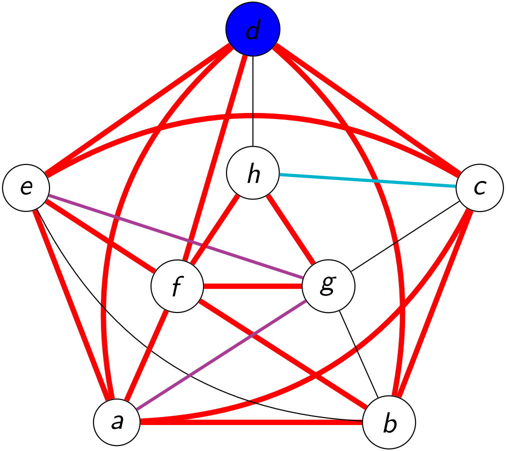

d
e
h
c
f
g
a
b

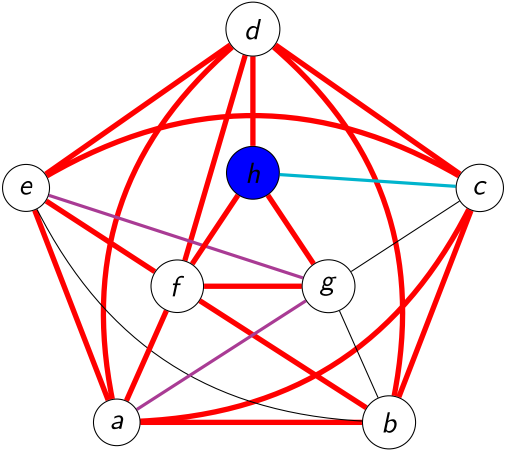
Eulertour

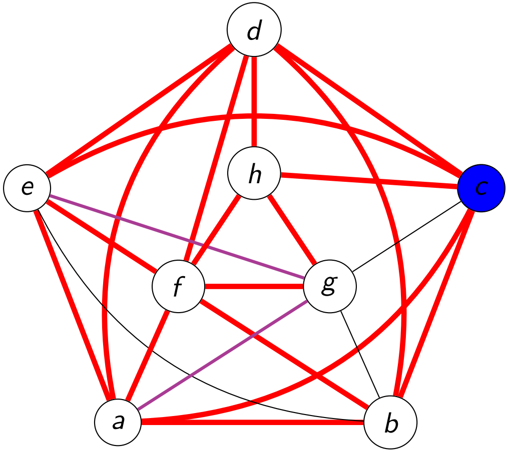


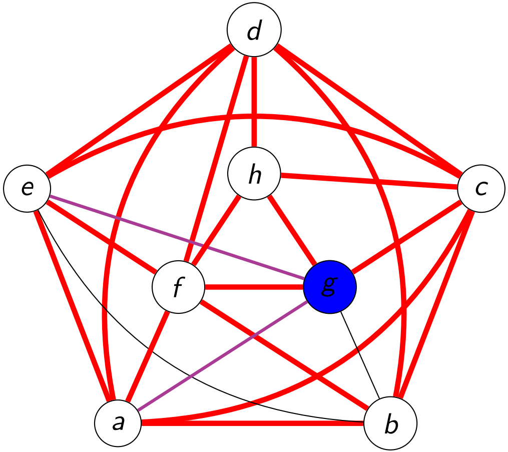
Eulertour

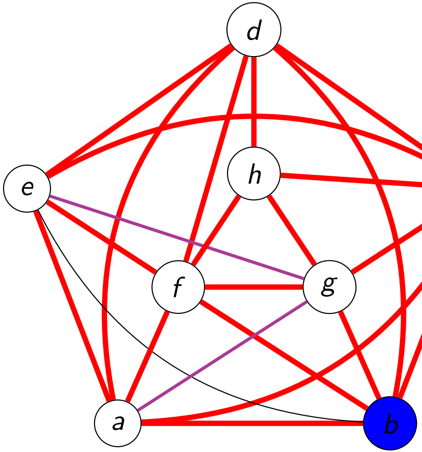


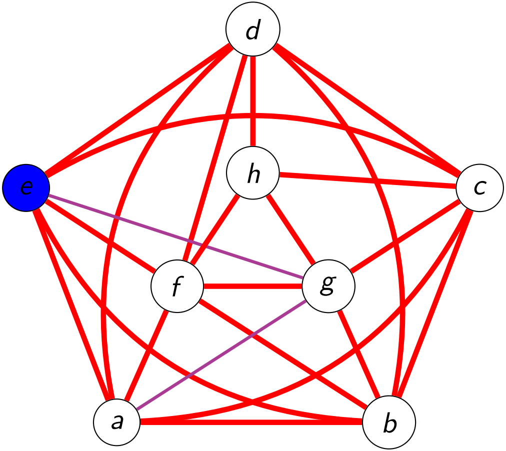

d
h
e
c
f
g
a
b

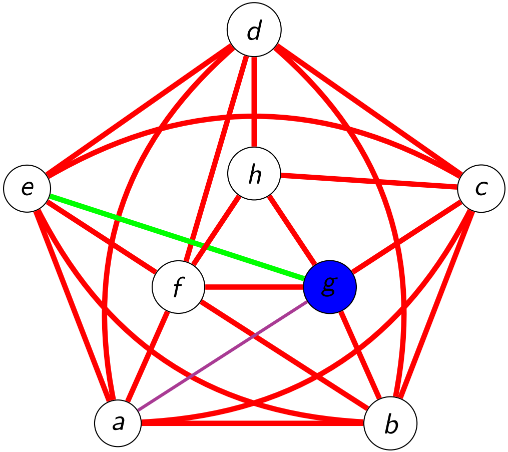

d
e
h
c
f
g
a
b


d
e
h
c
f
g
a
b

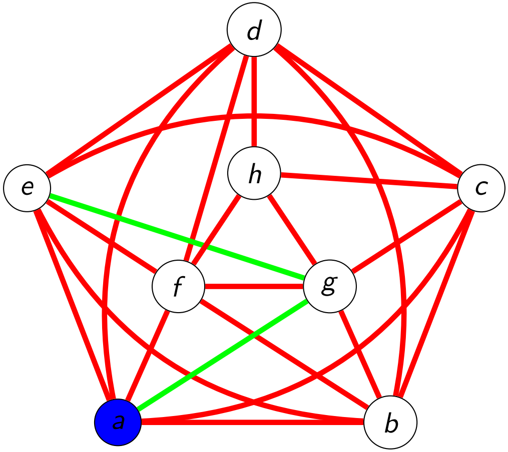

d
h
e
c
f
g
a
b


d
h
e
c
f
g
a
b


d
h
e
c
f
g
a
b


d
e
h
c
f
g
a
b

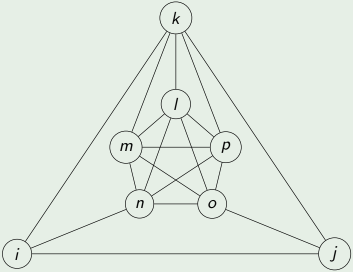
Eulertour



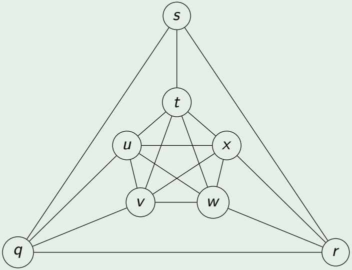
Aufgabe 1

Welche der folgenden Graphen H, H' sind zu G isomorph?

H :



H' :



Lösung:

Die Gradsequenz von G ist $(3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5)$.

Die von H ist aber $(3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 5)$. Damit scheidet H aus.

Die Gradsequenz von H' stimmt mit G überein. Außerdem sieht man sowohl bei G als auch bei H eine Symmetrie. Folglich müsste es egal sein, welchen Knoten von Grad 4 in H' man auf welchen in G abbildet. Der erste Versuch führt hier bereits zum Erfolg.

$z \in V(G)$	a	b	c	d	e	f	g	h
$f(z) \in V(H')$	v	w	x	t	u	q	r	s

392

IS ist NP-vollständig

Reduktion von 3-SAT auf IS

- Sei $F = \{C_1, \ldots, C_m\}$ mit $C_j = \{l_{j,1}, \ldots, l_{j,k_j}\}$ für $j = 1, \ldots, m$ eine 3-KNF-Formel über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$.
- Betrachte den Graphen $G = (V, E)$ mit

$$V = \{v_{ji} \mid 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq k_j\} \text{ und}$$
$$E = \left\{\{v_{ji}, v_{j'i'}\} \in \binom{V}{2} \middle| j = j' \text{ oder } l_{ji} = \bar{l}_{j'i'} \text{ oder } l_{j'i'} = \bar{l}_{ji}\right\}.$$

- Nun gilt

$$\begin{aligned} F \in \text{3-SAT} &\Leftrightarrow \text{es gibt eine Belegung, die in jeder Klausel } C_j \text{ (mindestens) ein Literal } l_{j,i_j} \text{ wahr macht} \\ &\Leftrightarrow \text{es gibt } m \text{ Literale } l_{1,i_1}, \ldots, l_{m,i_m}, \text{ die paarweise nicht komplementär sind (d.h. } l_{ji_j} \neq \bar{l}_{j'i_{j'}} \text{ für } j \neq j') \\ &\Leftrightarrow \text{es gibt } m \text{ Knoten } v_{1,i_1}, \ldots, v_{m,i_m}, \text{ die nicht durch Kanten verbunden sind} \\ &\Leftrightarrow G \text{ besitzt eine stabile Menge von } m \text{ Knoten.} \quad \square \end{aligned}$$

CLIQUE ist NP-vollständig

393

Korollar

CLIQUE ist NP-vollständig.

Beweis

- Es ist leicht zu sehen, dass jede Clique in einem Graphen $G = (V, E)$ eine stabile Menge in dem zu G komplementären Graphen $\bar{G} = (V, \bar{E})$ mit $\bar{E} = \binom{V}{2} \setminus E$ ist und umgekehrt.
- Daher lässt sich IS mittels

$$f : (G, k) \mapsto (\bar{G}, k)$$

auf CLIQUE reduzieren. $\square$

VC ist NP-vollständig

394

Korollar

VC ist NP-vollständig.

Beweis

- Offensichtlich ist eine Menge I genau dann stabil, wenn ihr Komplement $V \setminus I$ eine Kantenüberdeckung ist.
- Daher lässt sich IS mittels

$$f : (G, k) \mapsto (G, n(G) - k)$$

auf VC reduzieren. □

375

3-Sat ist NP-vollständig

Reduktion von CirSat auf 3-Sat

- Wir transformieren einen Schaltkreis $S = (g_1, \ldots, g_m)$ mit n Eingängen in eine 3-KNF Formel F_S über den Variablen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$, die die Klausel $\{y_m\}$ und für jedes Gatter g_i die Klauseln folgender Formel F_i enthält:

Gatter g_i	Semantik von F_i	Klauseln von F_i
0	$y_i = 0$	$\{\bar{y}_i\}$
1	$y_i = 1$	$\{y_i\}$
x_j	$y_i = x_j$	$\{\bar{y}_i, x_j\}, \{\bar{x}_j, y_i\}$
$(\neg, j)$	$y_i = \bar{y}_j$	$\{\bar{y}_i, \bar{y}_j\}, \{y_j, y_i\}$
$(\wedge, j, k)$	$y_i = y_j \wedge y_k$	$\{\bar{y}_i, y_j\}, \{\bar{y}_i, y_k\}, \{\bar{y}_j, \bar{y}_k, y_i\}$
$(\vee, j, k)$	$y_i = y_j \vee y_k$	$\{\bar{y}_j, y_i\}, \{\bar{y}_k, y_i\}, \{\bar{y}_i, y_j, y_k\}$

3-SAT ist NP-vollständig

376

Reduktion von CIRSAT auf 3-SAT

- Wir zeigen, dass für alle $a \in \{0,1\}^n$ folgende Äquivalenz gilt:

$$S(a) = 1 \Leftrightarrow \exists b \in \{0,1\}^m : F_S(ab) = 1.$$

- Ist nämlich $a \in \{0,1\}^n$ eine Eingabe mit $S(a) = 1$. Dann erhalten wir mit

$$b_i = g_i(a) \text{ für } i = 1, \ldots, m$$

  eine erfüllende Belegung $ab_1 \ldots b_m$ für F_S.
- Ist umgekehrt $ab_1 \ldots b_m$ eine erfüllende Belegung für F_S, so muss
  - $b_m = 1$ sein, da $\{y_m\}$ eine Klausel in F_S ist, und
  - durch Induktion über $i = 1, \ldots, m$ folgt

$$g_i(a) = b_i,$$

  d.h. insbesondere folgt $S(a) = g_m(a) = b_m = 1$.

3-Sat ist NP-vollständig

377

Reduktion von CirSat auf 3-Sat

- Wir wissen bereits, dass für alle $a \in \{0,1\}^n$ die Äquivalenz

  $$s(a) = 1 \Leftrightarrow \exists b \in \{0,1\}^m : F_s(ab) = 1.$$

  gilt.
- Dies bedeutet, dass der Schaltkreis S und die 3-KNF-Formel F_S erfüllbarkeitsäquivalent sind, d.h.

  $$S \in \text{CirSat} \Leftrightarrow F_S \in \text{3-Sat}.$$

- Da zudem die Reduktionsfunktion $S \mapsto F_S$ in FP berechenbar ist, folgt CirSat $\leq^p$ 3-Sat. □

395

Eine Variante von 3-Sat

Not-All-Equal-SAT (NaeSat):

Gegeben: Eine Formel F in 3-KNF.

Gefragt: Hat F eine (erfüllende) Belegung, unter der in keiner Klausel alle Literale denselben Wahrheitswert haben?

Satz

NaeSat ist NP-vollständig.

Beweis

- NaeSat $\in$ NP ist klar.
- Wir reduzieren CirSat auf NaeSat, indem wir die Reduktion von CirSat auf 3-Sat geeignet anpassen.

396

NaeSat ist NP-vollständig

Reduktion von CirSat auf NaeSat

- Wir reduzieren CirSat auf NaeSat, indem wir die Reduktion von CirSat auf 3-Sat geeignet anpassen:

Gatter g_i	Klauseln von F_i'
0	$\{\bar{y}_i, z\}$
1	$\{y_i, z\}$
x_j	$\{\bar{y}_i, x_j, z\}, \{\bar{x}_j, y_i, z\}$
$(\neg, j)$	$\{\bar{y}_i, \bar{y}_j, z\}, \{y_j, y_i, z\}$
$(\wedge, j, k)$	$\{\bar{y}_i, y_j, z\}, \{\bar{y}_i, y_k, z\}, \{\bar{y}_j, \bar{y}_k, y_i\}$
$(\vee, j, k)$	$\{\bar{y}_j, y_i, z\}, \{\bar{y}_k, y_i, z\}, \{\bar{y}_i, y_j, y_k\}$

- Es ist leicht zu sehen, dass alle Dreierklauseln unter jeder erfüllenden Belegung von F_S bereits beide Wahrheitswerte annehmen.
- Zu den übrigen Klauseln können wir eine neue Variable z hinzufügen.

397

NaeSat ist NP-vollständig

Reduktion von CirSat auf NaeSat

- Sei also $F'_S(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z)$ die Formel, die die Klausel $\{y_m, z\}$ und für jedes Gatter g_i die Klauseln folgender Formel F'_i enthält:

Gatter g_i	Klauseln von F'_i
0	$\{\bar{y}_i, z\}$
1	$\{y_i, z\}$
x_j	$\{\bar{y}_i, x_j, z\}, \{\bar{x}_j, y_i, z\}$
$(\neg, j)$	$\{\bar{y}_i, \bar{y}_j, z\}, \{y_j, y_i, z\}$
$(\wedge, j, k)$	$\{\bar{y}_i, y_j, z\}, \{\bar{y}_i, y_k, z\}, \{\bar{y}_j, \bar{y}_k, y_i\}$
$(\vee, j, k)$	$\{\bar{y}_j, y_i, z\}, \{\bar{y}_k, y_i, z\}, \{\bar{y}_i, y_j, y_k\}$

- F'_S entsteht also aus F_S, indem wir zu jeder Klausel mit ≤ 2 Literalen die neue Variable z hinzufügen.

398

NAESAT ist NP-vollständig

Reduktion von CIRSAT auf NAESAT

- Da die Funktion $f : S \mapsto F'_S$ offenbar in FP berechenbar ist, bleibt nur noch die Korrektheit von f zu zeigen:

$$S \in \text{CIRSAT} \Leftrightarrow F'_S \in \text{NAESAT}.$$

- Ist $S \in$ CIRSAT, so existiert eine Belegung ab mit $F_S(ab) = 1$.
- Folglich enthalten unter dieser Belegung alle Klauseln von F_S (und damit auch alle Klauseln von F'_S) ein wahres Literal.
- Tatsächlich wird unter ab in jeder Dreierklausel von F_S (und damit in jeder Klausel von F'_S, die z nicht enthält) auch ein Literal falsch, da ab neben jeder Dreierklausel der Form
  - $\{\bar{y}_i, y_j, y_k\}$ die Klauseln $\{\bar{y}_j, y_i\}$ und $\{\bar{y}_k, y_i\}$ und neben
  - $\{y_i, \bar{y}_j, \bar{y}_k\}$ die Klauseln $\{y_j, \bar{y}_i\}$ und $\{y_k, \bar{y}_j\}$ erfüllt.
- Setzen wir also $z = 0$, so wird in jeder Klausel von F'_S mindestens ein Literal wahr und mindestens ein Literal falsch.

399

NaeSat ist NP-vollständig

Reduktion von CirSat auf NaeSat

- Für die umgekehrte Implikation sei nun $F'_S \in$ NaeSat angenommen.
- Dann existiert eine Belegung $abc \in \{0,1\}^{n+m+1}$ für

  $$F'_S(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z),$$

  unter der in jeder Klausel ein wahres und ein falsches Literal vorkommen.
- Da dies auch unter der komplementären Belegung $\overline{abc}$ der Fall ist, können wir $c = 0$ annehmen.
- Dann erfüllt aber die Belegung ab die Formel F_S.
- Also ist $S(a) = 1$ und damit $s \in$ CirSat. $\square$

400

3-Coloring ist NP-vollständig

Reduktion von NaeSat auf 3-Coloring

- Sei eine 3-KNF-Formel $F = \{C_1, \ldots, C_m\}$ über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit Klauseln

$$C_j = \{l_{j,1}, \ldots, l_{j,k_j}\}, \;\; k_j \leq 3$$

gegeben.

- Wir können annehmen, dass F keine Einerklauseln enthält.
- Wir konstruieren einen Graphen $G_F = (V, E)$, der genau dann 3-färbbar ist, wenn $F \in$ NaeSat ist.
- Wir setzen

$$V = \{s, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\} \cup \{v_{jk} \mid 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq k_j\}$$

und

$$E = \Big\{\{s, x_i\}, \{s, \bar{x}_i\}, \{x_i, \bar{x}_i\} \;\Big|\; 1 \leq i \leq n\Big\} \cup \Big\{\{s, v_{jk}\} \;\Big|\; k_j = 2\Big\} \cup$$
$$\Big\{\{v_{jk}, v_{jl}\} \;\Big|\; k \neq l\Big\} \cup \Big\{\{v_{jk}, x_i\} \;\Big|\; l_{jk} = \bar{x}_i\Big\} \cup \Big\{\{v_{jk}, \bar{x}_i\} \;\Big|\; l_{jk} = x_i\Big\}.$$

401

3-COLORING ist NP-vollständig

Reduktion von NAESAT auf 3-COLORING

- Wir setzen

$$V = \{s\} \cup \{x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\} \cup \{v_{jk} \,|\, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq k_j\},$$

und

$$E = \Big\{\{s, x_i\}, \{s, \bar{x}_i\}, \{x_i, \bar{x}_i\} \,\Big|\, 1 \leq i \leq n\Big\} \cup \Big\{\{s, v_{jk}\} \,\Big|\, k_j = 2\Big\} \cup \Big\{\{v_{jk}, v_{jl}\} \,\Big|\, k \neq l\Big\} \cup \Big\{\{v_{jk}, x_i\} \,\Big|\, l_{jk} = \bar{x}_i\Big\} \cup \Big\{\{v_{jk}, \bar{x}_i\} \,\Big|\, l_{jk} = x_i\Big\}.$$

- Sei $a = a_1 \ldots a_n$ eine Belegung für F, unter der in jeder Klausel $C_j = \{l_{j1}, \ldots, l_{jk_j}\}$ ein Literal wahr und eines falsch wird.
- Wir können annehmen, dass $l_{j1}(a) = 0$ und $l_{j2}(a) = 1$ ist.
- Dann lässt sich G_F wie folgt mit den 3 Farben $0, 1, 2$ färben:

Knoten v	s	x_i	$\bar{x}_i$	v_{j1}	v_{j2}	v_{j3} (falls $k_j = 3$)
Farbe $c(v)$	2	a_i	$\bar{a}_i$	0	1	2

3-COLORING ist NP-vollständig

402

Reduktion von NAESAT auf 3-COLORING

- Sei nun umgekehrt $c : V \to \{0,1,2\}$ eine 3-Färbung von G_F.
- Dann können wir annehmen, dass $c(v) = 2$ ist.
- Also gilt für $i = 1,\dots,n$, dass $\{c(x_i), c(\bar{x}_i)\} = \{0,1\}$ ist.
- Zudem müssen die Knoten $v_{j1},\dots,v_{jk_j}$ im Fall $k_j = 2$ mit 0 und 1 und im Fall $k_j = 3$ mit allen drei Farben 0, 1 und 2 gefärbt sein.
- Wir können annehmen, dass $c(v_{j1}) = 0$ und $c(v_{j2}) = 1$ ist.
- Wegen $\{v_{jk}, \bar{l}_{jk}\} \in E$ muss $c(v_{jk}) \neq c(\bar{l}_{jk})$ für $k = 1,\dots,k_j$ und daher $c(v_{jk}) = c(l_{jk})$ für $k = 1,2$ gelten.
- Also macht die Belegung $a = c(x_1)\dots c(x_n)$ die Literale l_{j1} falsch und l_{j2} wahr.
- Insgesamt gilt also

$$F \in \text{NAESAT} \Leftrightarrow G_F \in \text{3-COLORING}. \qquad \square$$