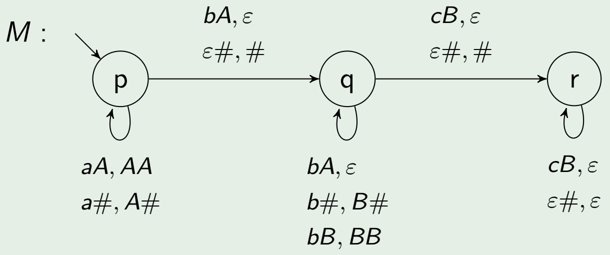
Einführung in die Theoretische Informatik
Tutorium VII

Michael R. Jung

01. - 03. 12. 2014

Aufgabe 1

Geben Sie für die Wörter $w_1 = a^3bc, w_2 = a^3b^5c, w_3 = a^3b^5c^2$ alle möglichen Rechnungen von M an. Welche Sprache erkennt der folgende PDA M? Zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Behauptung.



w_1 :

$(p, a^3bc, \#) \vdash (q, a^3bc, \#) \vdash (r, a^3bc, \#) \vdash (r, a^3bc, \varepsilon)$

$(p, a^3bc, \#) \vdash (p, a^2bc, A\#) \vdash (p, abc, AA\#) \vdash (p, bc, AAA\#) \vdash (q, c, AA\#)$

w_2 :

$(p, a^3b^5c, \#) \vdash^3 (r, a^3b^5c, \varepsilon)$

$(p, a^3b^5c, \#) \vdash^3 (p, b^5c, A^3\#) \vdash^3 (q, b^2c, \#) \vdash^2 (r, b^2c, \varepsilon)$

$(p, a^3b^5c, \#) \vdash^6 (q, b^2c, \#) \vdash (q, bc, B\#) \vdash (q, c, BB\#) \vdash (r, \varepsilon, B\#)$

w_3 :

$(p, a^3b^5c^2, \#) \vdash^3 (r, a^3bc^2, \varepsilon)$

$(p, a^3b^5c^2, \#) \vdash^6 (q, b^2c^2, \#) \vdash^2 (r, b^2c^2, \varepsilon)$

$(p, a^3b^5c^2, \#) \vdash^8 (q, c^2, BB\#) \vdash (r, c, B\#) \vdash (r, \varepsilon, \#) \vdash (r, \varepsilon, \varepsilon)$

$$L(M) = \{a^n b^m c^k | 0 \leq m = n + k\} := L$$

$L(M) \supseteq L$:

Sei $w = a^n b^m c^k$ mit $0 \leq m = n + k$. Sei $n' = \begin{cases} n & \text{falls } n > 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$,
k' analog. Dann gibt es folgende Rechnung von M:
$(p, a^n b^m c^k, \#) \vdash^n (p, b^m c^k, A^n\#) \vdash^{n'} (q, b^{m-n(=k)} c^k, \#) \vdash^k$
$(q, c^k, B^k\#) \vdash^{k'} (r, \varepsilon, \#) \vdash (r\varepsilon, \varepsilon)$ $\square$

$L(M) \subseteq L$:

Betrachten wir eine akzeptierende Rechnung von M:
Da $\#$ vom Keller gelöscht werden muss, endet eine solche Rechnung in r.
Desweiteren ist leicht zu erkennen, dass as nur in p gelesen werden können, dass wir nach dem Lesen des ersten bs in q landen, dass wir weitere bs nur dort lesen können und dass wir nach dem Lesen des ersten cs in r landen. Folglich ist die korrekte Reihenfolge der Buchstaben gesichert. Wir müssen also nur noch die Korrektheit der Anzahlen überprüfen, d.h. $L(M) \subseteq \{a^n b^m c^k | n, m, k \in \mathbb{N}\}$.

$L(M) \subseteq L$ (Forts.):

Sei $w = a^n b^m c^k \in L(M)$.

Für jedes gelesene a am Anfang, legen wir ein A auf den Keller.

Diese können wir nur mit einer gleichen Anzahl bs löschen, da nur zum Löschen von As nur die Regeln $pbA \to q\varepsilon$ und $qbA \to q\varepsilon$ existieren, d.h. $(p, w, \#) \vdash^* (q, b^{m-n}c^k, \#)$ und dies ist die einzige Möglichkeit zum Lesen von as.

Alle weiteren bs legen ein B auf den Keller, d.h. $(q, b^{m-n}c^k, \#) \vdash^* (q, c^k, B^{m-n}\#)$ und dies ist die einzige Möglichkeit zum Lesen von weiteren bs.

$L(M) \subseteq L$ (Forts.):

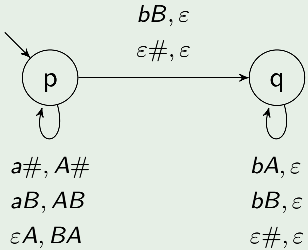
Ein B kann nur durch Lesen eines cs gelöscht werden ($qcB \to r\varepsilon, rcB \to r\varepsilon$), d.h. $(q, c^k, B^{m-n}\#) \vdash^* (r, c^{k-(m-n)}, \#)$. Hier können nun keine weiteren cs gelesen werden, sondern nur noch die Raute ohne ein weiteres gelesenes Zeichen gelöscht werden, d.h. $(r, c^{k-(m-n)}, \#) \vdash (r, c^{k-(m-n)}, \varepsilon)$. Da der Keller nun aber leer ist, gilt also

$k - (m - n) = 0 \Leftrightarrow k + n - m = 0 \Leftrightarrow m = k + n.$ □

Aufgabe 2

Wandeln sie den folgenden PDA M mit dem Verfahren aus der VL in eine Grammatik G um.

M:



Geben Sie eine Rechung von M und eine Linksableitung in G für *aabbbb* an.

$$V := \{S, X_{p\#p}, X_{p\#q}, X_{pAp}, X_{pAq}, X_{pBp}, X_{pBq},$$
$$X_{q\#p}, X_{q\#q}, X_{qAp}, X_{qAq}, X_{qBp}, X_{qBq}\}$$

$$\Sigma := \{a, b\}$$

$$P := \{S \to X_{p\#p} | X_{p\#q}, \qquad \text{Start } (1,2)$$

$$X_{p\#p} \to a \underbrace{X_{pAp} X_{p\#p}}_{(p,p)} | a \underbrace{X_{pAq} X_{q\#p}}_{(q,p)}, \qquad pa\# \to pA\# \; (3,4)$$

$$X_{p\#q} \to a \underbrace{X_{pAp} X_{p\#q}}_{(p,q)} | a \underbrace{X_{pAq} X_{q\#q}}_{(q,q)}, \qquad pa\# \to pA\# \; (3,4)$$

$$X_{pBp} \to aX_{pAp}X_{pBp} | aX_{pAq}X_{qBp}, \qquad paB \to pAB \; (7,8)$$

$$X_{pBq} \to aX_{pAp}X_{pBq} | aX_{pAq}X_{qBq}, \qquad paB \to pAB \; (9,10)$$

$$X_{pAp} \to X_{pBp}X_{pAp}|X_{pBq}X_{qAp}, \qquad p\varepsilon A{\to}pBA \ (11,12)$$

$$X_{pAq} \to X_{pBp}X_{pAq}|X_{pBq}X_{qAq}, \qquad p\varepsilon A{\to}pBA \ (13,14)$$

$$X_{pBq} \to b \qquad pbB{\to}q \ (15)$$

$$X_{p\#q} \to \varepsilon \qquad p\varepsilon\#{\to}q \ (16)$$

$$X_{qBq} \to b \qquad qbB{\to}q \ (17)$$

$$X_{qAq} \to b \qquad qbA{\to}q \ (18)$$

$$X_{q\#q} \to \varepsilon \qquad q\varepsilon\#{\to}q \ (19)$$

$$\}$$

Somit ist $G = (V, \Sigma, P, S)$.

Rechnung von M:

$(p, aabbbb, \#) \vdash (p, abbbb, A\#) \vdash (p, abbbb, BA\#) \vdash (p, bbbb, ABA\#) \vdash$
$(p, bbbb, BABA\#) \vdash (q, bbb, ABA\#) \vdash (q, bb, BA\#) \vdash (q, b, A\#) \vdash$
$(q, \varepsilon, \#) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$

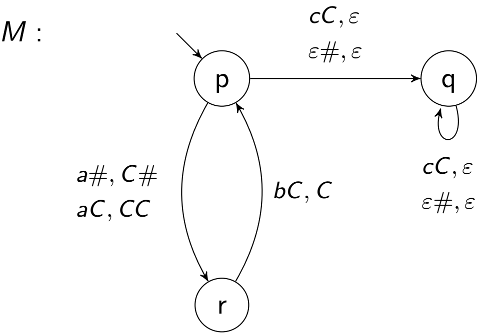
Ableitung in G:

$S \Rightarrow^{(2)} X_{p\#q} \Rightarrow^{(4)} aX_{pAq}X_{q\#q} \Rightarrow^{(14)} aX_{pBq}X_{qAq}X_{q\#q} \Rightarrow^{(10)}$
$aaX_{pAq}X_{qBq}X_{qAq}X_{q\#q} \Rightarrow^{(14)} aaX_{pBq}X_{qAq}X_{qBq}X_{qAq}X_{q\#q} \Rightarrow^{(15)}$
$aabX_{qAq}X_{qBq}X_{qAq}X_{q\#q} \Rightarrow^{(18)} aabbX_{qBq}X_{qAq}X_{q\#q} \Rightarrow^{(17)} aabbbX_{qAq}X_{q\#q} \Rightarrow^{(18)}$
$aabbbbX_{q\#q} \Rightarrow^{(19)} aabbbb$

Aufgabe 3

Geben Sie einen PDA M für die Sprache $L := \{(ab)^n c^n | n \in \mathbb{N}\}$ an. Entwerfen Sie außerdem eine Grammatik G für L und wandeln Sie diese in einen PDA M' um.

Lösung: PDA


M :
p
q
r
cC, ε
$\varepsilon\#, \varepsilon$
$a\#, C\#$
aC, CC
bC, C
cC, ε
$\varepsilon\#, \varepsilon$

Lösung: Grammatik → PDA

$$G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to \varepsilon | abSc\}, S)$$

$$M' = (\{q\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, S\}, \delta, q, S)$$

$$\begin{aligned} \delta : qaa &\to q & \qquad q\varepsilon S &\to q \\ qbb &\to q & q\varepsilon S &\to qabSc \\ qcc &\to q & & \end{aligned}$$