Einführung in die Theoretische Informatik
Tutorium VIII

Michael R. Jung

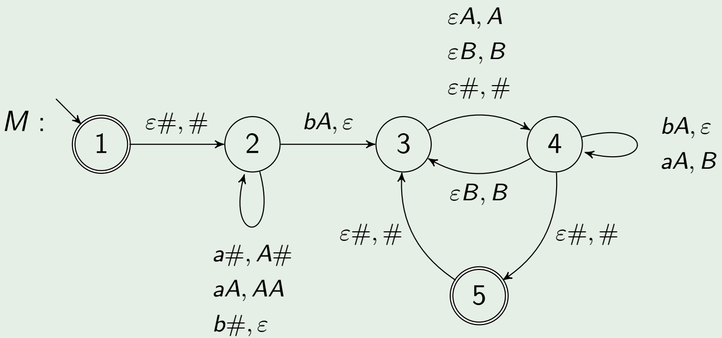
08. - 10. 12. 2014

Welche Schritte sind zu tun, wenn ich einen gegebenen DPDA M zu einem DPDA für das Komplement von $L(M)$ umbauen will?

1. Zunächst benötigen wir einen Automaten, der alle Eingaben zu Ende liest und
2. nach Lesen eines Wortes nicht durch ε-Übergänge noch Endzustände und Nicht-Endzustände besucht. Folien vom 1. Dezember, Folie 233.
3. Dann können wir einen DPDA für das Komplement angeben. Folien vom 1. Dezember, Folie 237.

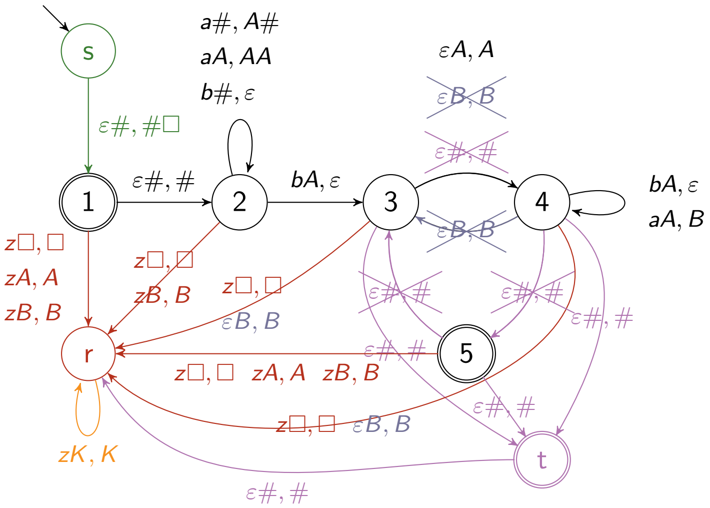
Aufgabe 1

Konstruieren Sie aus dem folgenden DPDA M einen Automaten M' mit $L(M') = L$, der alle Eingaben zu Ende liest.



Seien hier $z \in \Sigma$ und $K \in \Gamma'$ beliebig.

M' :



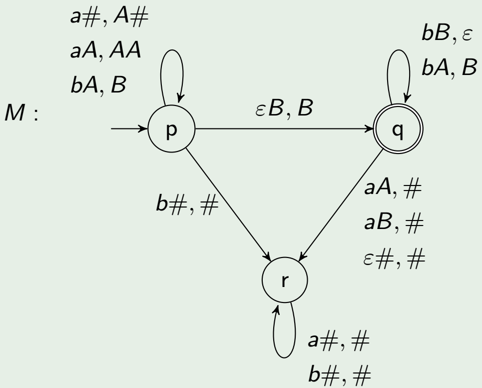
$M' = (\{1,2,3,4,5,r,s,t\}, \{a,b\}, \{\#, A, B, \square\}, \delta', s, \#, \{1,5,t\})$
$K \in \{\square, A, B\}$

δ'	$s\#$	sK	$1\#$	$1K$	$2\#$	$2A$	$2B$	$2\square$	$3\#$	$3A$	$3B$	$3\square$
ε	$s\#\square$		$2\#$						$t\#$	$4A$	rB	
a				rK	$2A\#$	$2AA$	rB	$r\square$				$r\square$
b				rK	2	3	rB	$r\square$				$r\square$

	$t\#$	tK	$r\#$	rK	$4\#$	$4A$	$4B$	$4\square$	$5\#$	$5A$	$5B$	$5\square$
ε	$r\#$				$t\#$		rB		$t\#$			
a			$r\#$	rK		$4B$		$r\square$		rA	rB	$r\square$
b			$r\#$	rK		4		$r\square$		rA	rB	$r\square$

Aufgabe 2

Wandeln Sie den gegebenen DPDA M, der alle Eingaben zu Ende liest in eine DPDA M' für $\overline{L(M)}$ um.



$$M' = (\{p, q, r\} \times \{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \{\#, A, B\}, \delta', (p, 1), \#, \{(q, 3), (p, 3), (r, 3)\})$$

δ'	$(p,1)\#$	$(p,1)A$	$(p,1)B$	$(p,2/3)\#$	$(p,2/3)A$	$(p,2)B$	$(p,3)B$
ε	$(p,3)\#$	$(p,3)A$	$(q,2)B$			$(q,2)B$	
a				$(p,1)A\#$	$(p,1)AA$		
b				$(r,1)\#$	$(p,1)B$		
	$(q,1)\#$	$(q,1)A$	$(q,1)B$	$(q,2)\#$	$(q,3)\#$	$(q,2/3)A$	$(q,2/3)B$
ε	$(r,1)\#$	$(q,3)A$	$(q,3)B$	$(r,2)\#$			
a						$(r,1)\#$	$(r,1)\#$
b						$(q,2)B$	$(q,2)$
	$(r,1)\#$	$(r,1)A$	$(r,1)B$	$(r,2/3)\#$	$(r,2/3)A$	$(r,2/3)B$	
ε	$(r,3)\#$						
a				$(r,1)\#$			
b				$(r,1)\#$			

Aufgabe 3

Sei $\Sigma = \{a\}$. Geben Sie eine Grammatik G für $L = \{a^{2^n} | n \geq 0\}$ an.

Lösung:

$G = (\{S, A, E\}, \Sigma, P, S)$ mit

$$
\begin{aligned}
P = \{ \quad S &\rightarrow AS & (1)\\
S &\rightarrow E & (2)\\
AE &\rightarrow aE & (3)\\
Aa &\rightarrow aaA & (4)\\
E &\rightarrow a \quad \} & (5)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

Geben Sie einen LBA M an, der $\{a^{2^n} | n \geq 0\}$ akeptiert.

Lösung:

$M = (\{q_0, q_?, q_s, q_{del}, q_<, e\}, \{a, \hat{a}\}, \{A, \#, \hat{\#}\}, \delta, q_0, \{e\})$ mit

$$
\begin{array}{llll}
\delta: & q_0\hat{a} \to e\hat{a}N & q_s\# \to q_s\#R & q_{del}a \to q_s\#R \\
 & q_0 a \to q_? AR & q_s\hat{\#} \to q_<\hat{\#}L & q_{del}\hat{a} \to q_<\hat{\#}L \\
 & q_? a \to q_s\#R & q_s a \to q_{del} aR & q_<\# \to q_<\#L \\
 & q_?\# \to q_?\#R & q_s\hat{a} \to q_s\hat{a}N & q_< a \to q_< aL \\
 & q_?\hat{a} \to q_<\hat{\#}L & q_{del}\# \to q_{del}\#R & q_< A \to q_? AR \\
 & q_?\hat{\#} \to e\hat{\#}N & q_{del}\hat{\#} \to q_{del}\hat{\#}N &
\end{array}
$$

Aufgabe 5

Geben Sie einen LBA M an, der $L(G)$ mit
$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to \underbrace{aSb}_{(1)} \mid \underbrace{ab}_{(2)}\}, S)$ akeptiert.

Siehe Folien vom 3. Dezember, Folie 264.

Lösung:

$M = (Z, \hat{\Sigma} := \{a, \hat{a}, b, \hat{b}\}, \Gamma := \{A, \#, \hat{\#}, S, S'\}, \delta, q_0', \{e\})$ mit

Sei $x \in \{a, b, \hat{a}, \hat{b}, S\}$ und $y \in (\hat{\Sigma} \cup \Gamma) \setminus \{\#, \hat{\#}\}$.

$Z = \{q_0, q_0', q_1, q_1', q_1'', q_2, q_2', q_<, q_>, q_?, e\} \cup \{q_{<-x}, q_x | x \in \{a, b, \hat{a}, \hat{b}, S\}\}$ und

$\delta :$

$q_0'\hat{a} \to q_0'\hat{a}N$	$q_1 a \to q_1' SR$	$q_> \hat{b} \to q_{<-\hat{b}}\#$	$q_2 b \to q_2 bR$
$q_0' b \to q_0' bN$	$q_1' S \to q_1'' \# R$	$q_> S \to q_{<-S}$	$q_2 S \to q_2 SR$
$q_0' a \to q_0 AN$	$q_1'' b \to q_> \# R$	$q_> \hat{\#} \to q_< \hat{\#}$	$q_2 a \to q_2' SR$
$q_0 A \to q_1 AN$	$q_1'' \hat{b} \to q_< \hat{\#} L$	$q_{<-x} \# \to q_{<-x} \# L$	$q_2 A \to q_2' S' R$
$q_0 A \to q_2 AN$	$q_< \# \to q_< \# L$	$q_{<-x} y \to q_x yR$	$q_2' b \to q_> \# R$
$q_1 A \to q_1 AR$	$q_< b \to q_< bL$	$q_x \# \to q_> xR$	$q_1 S \to q_1 SR$
$q_1 a \to q_1 aR$	$q_< a \to q_< aL$	$q_1 A \to q_1 S' R$	
$q_1 b \to q_1 bR$	$q_< A \to q_0 AN$	$q_< S' \to q_? S' R$	
$q_1 \hat{a} \to q_1 \hat{a} N$	$q_> \# \to q_> \# R$	$q_? \# \to q_? \# R$	
$q_1 \hat{b} \to q_1 \hat{b} N$	$q_> a \to q_{<-a} \#$	$q_? \hat{\#} \to e \hat{\#} N$	
$q_1 \# \to q_1 \# N$	$q_> b \to q_{<-b} \#$	$q_2 A \to q_2 AR$	
$q_1 \hat{\#} \to q_1 \hat{\#} N$	$q_> \hat{a} \to q_{<-\hat{a}} \#$	$q_2 a \to q_2 aR$	

DPDAs, die ihre Eingabe zu Ende lesen

233

Beweis (Schluss)

Zusammenfassend transformieren wir $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ in den DPDA

$$M' = (Z \cup \{r, s, t\}, \Sigma, \Gamma', \delta', s, \#, E \cup \{t\}) \text{ mit } \Gamma' = \Gamma \cup \{\square\},$$

wobei δ' folgende Anweisungen enthält:

(a) $s\varepsilon\# \to q_0\#\square$,

(b) $qaA \to rA$, für alle $(q, a, A) \in Z \times \Sigma \times \Gamma'$ mit $A = \square$ oder $\delta(q, a, A) = \delta(q, \varepsilon, A) = \varnothing$,

(c) $raA \to rA$, für alle $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma'$,

(d) $q\varepsilon A \to rA$, für alle $q \in Z$ und $A \in \Gamma$, so dass ausgehend von der Konfiguration (q, ε, A) unendlich viele ε-Übergänge ausgeführt werden, ohne dass dabei ein Endzustand besucht wird.

(e) $q\varepsilon A \to tA$
$t\varepsilon A \to rA$, für alle $q \in Z$ und $A \in \Gamma$, so dass ausgehend von der Konfiguration (q, ε, A) unendlich viele ε-Übergänge ausgeführt und dabei auch Endzustände besucht werden,

(f) alle Anweisungen aus δ, soweit sie nicht durch Anweisungen vom Typ (c) oder (e) überschrieben wurden. $\square$

237

Komplementabschluss von DCFL

Beweis (Schluss)

- Konkret sei $\overline{M} = (Z \times \{1,2,3\}, \Sigma, \Gamma, \delta', s, \#, Z \times \{3\})$ mit

$$s = \begin{cases} (q_0, 1), & q_0 \notin E, \\ (q_0, 2), & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei δ' für jede Anweisung $q\varepsilon A \rightarrow_M p\gamma$ die Anweisungen

$$\begin{aligned} &(q,1)\varepsilon A \rightarrow (p,1)\gamma, && \text{falls } p \notin E, \\ &(q,1)\varepsilon A \rightarrow (p,2)\gamma, && \text{falls } p \in E \text{ und} \\ &(q,2)\varepsilon A \rightarrow (p,2)\gamma, \end{aligned}$$

sowie für jede Anweisung $qaA \rightarrow_M p\gamma$ folgende Anweisungen enthält:

$$\begin{aligned} &(q,1)\varepsilon A \rightarrow (q,3)A, \\ &(q,2)aA \rightarrow (p,1)\gamma, && \text{falls } p \notin E, \\ &(q,2)aA \rightarrow (p,2)\gamma, && \text{falls } p \in E, \\ &(q,3)aA \rightarrow (p,1)\gamma, && \text{falls } p \notin E \text{ und} \\ &(q,3)aA \rightarrow (p,2)\gamma, && \text{falls } p \in E. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\overline{M}$ in einem Endzustand keine ε-Übergänge macht. □

264

Beweis von CSL $\subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\}$

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextsensitive Grammatik. Dann wird $L(G)$ von folgendem LBA M akzeptiert (o.B.d.A. sei $\varepsilon \notin L(G)$):

Arbeitsweise von M bei Eingabe $x = x_1 \dots x_{n-1}\hat{x}_n$ mit $n > 0$:

1 Markiere das erste Eingabezeichen x_1
2 Wähle (nichtdeterministisch) eine Regel $\alpha \to \beta$ aus P
3 Wähle ein beliebiges Vorkommen von β auf dem Band (falls β nicht vorkommt, halte ohne zu akzeptieren)
4 Ersetze die ersten $|\alpha|$ Zeichen von β durch α
5 Falls das erste (oder letzte) Zeichen von β markiert war, markiere auch das erste (letzte) Zeichen von α
6 Verschiebe die Zeichen rechts von β um $|\beta| - |\alpha|$ Positionen nach links und überschreibe die frei werdenden Bandfelder mit Blanks
7 Enthält das Band außer Blanks nur das (markierte) Startsymbol, so halte in einem Endzustand
8 Gehe zurück zu Schritt 2