Einführung in die Theoretische Informatik
Tutorium IX

Michael R. Jung

18. 12. 2015 & 06. 01. 2016

(Semi-)Entscheidbarkeit

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$.

- L heißt *semientscheidbar*, falls eine DTM M existiert mit $L(M) = L$.
- Sei M eine NTM und $x \in \Sigma^*$. M *entscheidet* x,falls für jede Rechnung von M bei Eingabe x gilt:
  - die Rechnung ist akzeptierend oder
  - die Rechnung ist endlich.
- L heißt *entscheidbar*, falls eine DTM M existiert, die alle Eingaben entscheidet mit $L(M) = L$.
- L heißt *unentscheidbar*, falls L nicht entscheidbar ist. Das Halteproblem ist also unentscheidbar und semientscheidbar.
- RE$= \{L | L$ semientscheidbar$\}$, REC$= \{L | L$ entscheidbar$\}$

Berechnung von Funktionen

273

Definition

- Eine k-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ berechnet eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$, falls M bei jeder Eingabe $x \in \Sigma^*$ in einer Konfiguration

  $$K = (q, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k) \text{ mit } u_k = f(x)$$

  hält (d.h. $K_x \vdash^* K$ und K hat keine Folgekonfiguration).
- Hierfür sagen wir auch, M gibt bei Eingabe x das Wort $f(x)$ aus und schreiben $M(x) = f(x)$.
- f heißt Turing-berechenbar (oder einfach berechenbar), falls es eine k-DTM M mit $M(x) = f(x)$ für alle $x \in \Sigma^*$ gibt.
- Aus historischen Gründen werden berechenbare Funktionen auch rekursiv (engl. *recursive*) genannt.

274

Berechenbarkeit von partiellen Funktionen

Definition

- Eine partielle Funktion hat die Form $f : \Sigma^* \to \Gamma^* \cup \{\uparrow\}$.
- Für $f(x) = \uparrow$ sagen wir auch $f(x)$ ist undefiniert.
- Der Definitionsbereich (engl. *domain*) von f ist

  $$dom(f) = \{x \in \Sigma^* \mid f(x) \neq \uparrow\}.$$

- Das Bild (engl. *image*) von f ist

  $$img(f) = \{f(x) \mid x \in dom(f)\}.$$

- f heißt total, falls $dom(f) = \Sigma^*$ ist.
- Eine k-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ berechnet f, falls $M(x)$ für alle $x \in dom(f)$ das Wort $f(x)$ ausgibt und für alle $x \notin dom(f)$ keine Ausgabe berechnet (d.h. $M(x) = \uparrow$).

Aufgabe 1

Sind folgende Funktionen $f, g, h : \{0, 1, \dots, 9\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ (partiell) berechenbar?

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \text{ ist Teil der Dezimaldarstellung von } \pi \\ \uparrow, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$h(x) := \begin{cases} 1, & 3^{|x|} \text{ ist Teil der Dezimaldartsellung von } \pi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Hinweis: Es existiert ein Algorithmus, der die Dezimaldarstellung von π beliebig genau berechnen kann.

Lösung:

Die partielle Funktion f ist mit folgendem Algorithmus berechenbar:

```
Eingabe x;
 k=10;
s="";
while (x nicht Teilwort von s)
begin
  Berechne die ersten k Dezimalstellen
     von Pi und speichere sie in s;
  k=k*k;
end
```

h ist berechenbar, denn entweder kommen beliebig lange Folgen von 3en vor, dann ist $h \equiv 1$. Ansonsten gibt es ein n, sodass 3^k für alle $k > n$ kein Teilwort der Dezimaldarstellung von π ist. Hier muss also nur die Länge von x geprüft werden, was natürlich auch berechenbar ist.

Wir wissen nur nicht welche Funktion die richtige ist, aber diese ist berechenbar.